Colle du 01/04 - Sujet 1
Séries et dimension

Question de cours.

1. Caractériser par la dimension le fait que deux sous-espaces vectoriels soient égaux.
2. Démontrer que la série de Riemann d'exposant $\alpha = 2$ converge.

Exercice 1. Soit $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x-y+2z+t=0 \end{array} \right\}$ et $G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y-2z+3t=0 \right\}$.

1. Déterminer la dimension de F puis celle de $F+G$.
2. Vérifier que $(1,1,-2,3) \in F \cap G$. En déduire $F \cap G$.

Exercice 2. *(Règle de D'Alembert)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge et on note ℓ sa limite.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Que peut-on dire si $\ell = 1$?

Colle du 01/04 - Sujet 2
Séries et dimension

Question de cours.

1. Définir la divergence grossière. Si la série converge, que dire de son terme général ? Donner un contre-exemple à la réciproque.
2. Déterminer un supplémentaire dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ de $F = \left\{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M = O_2 \right\}$.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère $F = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1) = 0 \}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(X^2+X, X^3+1\right)$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$ puis montrer que ces espaces sont supplémentaires.

Exercice 2. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$ converge puis calculer sa somme totale.

Colle du 01/04 - Sujet 3
Séries et dimension

Question de cours.

1. Enoncer le théorème de la base incomplète.
2. Démontrer que la série exponentielle converge.

Exercice 1. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On pose pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$.

1. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.
2. En utilisant la formule $\sin(2a) = \ldots$ calculer la somme totale de la série.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $F = \{ P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mid P(-X) = P(X) \}$ et $G = \left\{ XP\left(X^2\right) \;\middle|\; P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Montrer que $F \oplus G$.
3. Déterminer une base de F puis de G.
4. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_{2n}[X]$.